-CAPITOLUL II-

CALCULUL DE EFEMERIDĂ

Reprezintă prezicerea poziţiei(poziţiilor)care vor fi ocupate de un astru pe boltă la un moment oarecare de timp(respectiv la mai multe momente,de obicei echidistante).Această operaţie presupune cunoaşterea în prealabil a orbitei.

2.1. ELEMENTELE ORBITEI

Sînt în număr de şase şi determină complet mişcarea planetei.

1.După figura 4,unghiul pe care planul orbitei îl face cu ecliptica se cheamă <u>înclinaţia orbitei,i.</u>

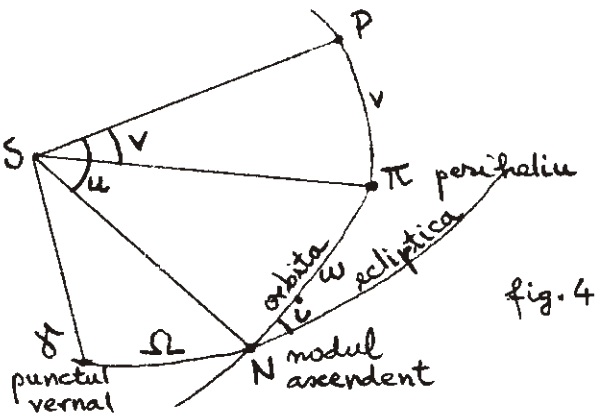

fig.4

2.Cele două puncte în care planul orbitei taie ecliptica se numesc nodurile orbitei.

Numim nodul ascendent N,acela pe care planeta îl traversează cînd trece din emisfera ecliptică sudică în cea nordică.Al doilea element al orbitei se numeşte <u>longitudinea nodului ascendent,</u> <u>Ω.</u>

3.Unghiul măsurat pe orbită de la N la periheliu poartă numele de <u>argument(de latitudine)al periheliului,ω</u>.Uneori,în locul acestui element,se foloseşte <u>longitudinea periheliului(periastrului)Π (sau $\bar{\omega}$)</u>$=\Omega+\omega$.

4.<u>Excentricitatea orbitei,e.</u>Se mai foloseşte uneori,pentru elipsă,<u>unghiul de excentricitate, φ</u> cu $e=\sin\varphi$.

5.<u>Semiaxa mare,a</u> în cazul elipsei,sau <u>semiaxa transversă,a,</u> în cazul hiperbolei sau încă <u>distanţa periheliului,q</u> pentru parabolă.In locul lor se poate da parametrul p dat de(**)în 1.1.

6.<u>Epoca trecerii la periheliu,T</u> în locul căreia se mai foloseşte uneori longitudinea epocii, l_0 sau încă anomalia medie, M_0 la epoca luată drept origine, t_0 (a nu se confunda cu anomalia medie M -v.1.4., pentru că $M=n(t-T)=M_0+n(t-t_0)$) .

2.2. CALCULUL UNEI EFEMERIDE

Fie tot pe figura 4 poziţia astrului P la un moment oarecare şi anomalia sa adevărată, v. Se numeşte <u>argument de latitudine, u</u> arcul NP ; avem deci $u=\omega+v$.

Să introducem trei axe avînd originea în S, axa Ox dirijată spre echinocţiul de primăvară ♈, axa Oy la 90° în planul eclipticii şi axa Oz spre polul nord ecliptic.

Coordonatele rectangulare ecliptice ale punctului P situat la distanţa r de S, vor fi, după exploatarea unghiurilor din figură

$$(1)\begin{cases} x = r(\cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i) \\ y = r(\sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i) \\ z = r\sin u\sin i \end{cases}$$

Să transformăm aceste coordonate în coordonate rectangulare ecuatoriale; ceea ce corespunde la o schimbare de axe: axa Ox rămîne aceeaşi, trebuind să rotim axele Oy şi Oz în jurul lui Sx, cu un unghi ε care reprezintă înclinarea eclipticii pe ecuator. Această schimbare de coordonate corespunde la

$$(1')\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon \\ z' = y\sin\varepsilon + z\cos\varepsilon \end{cases}$$

ceea ce, împreună cu (1) ne conduce la

$$(2)\begin{cases} x' = r(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i) \\ y' = r(\cos u\sin\Omega\cos\varepsilon + \sin u\cos\Omega\cos i\cos\varepsilon - \sin u\sin i\sin\varepsilon \\ z' = r(\cos u\sin\Omega\sin\varepsilon + \sin u\cos\Omega\cos i\sin\varepsilon + \sin u\sin i\cos\varepsilon \end{cases}$$

Se simplifică aceste formule introducînd cantităţile a, b, c, A, B, C cu convenţia a, b, c > 0, definite prin

$$(3)\begin{cases} \cos\Omega = a\sin A \\ -\cos i\sin\Omega = a\cos A \\ \sin\Omega\cos\varepsilon = b\sin B \\ \cos\Omega\cos i\cos\varepsilon - \sin i\sin\varepsilon = b\cos B \\ \sin\Omega\sin\varepsilon = c\sin C \\ \cos\Omega\cos i\sin\varepsilon + \sin i\cos\varepsilon = c\cos C \end{cases}$$

Cantitățile introduse se numesc constantele lui Gauss;odată înlocuite în expresiile (2),vom găsi

$$(4)\quad \begin{cases} x' = a r \sin(A+u) \\ y' = b r \sin(B+u) \\ z' = c r \sin(C+u) \end{cases}$$

Dacă acum se duc,prin centrul Pămîntului,axele paralele la Ox', Oy',Oz' și dacă desemnăm prin ξ,η,ζ coordonatele planetei în raport cu aceste axe,vom avea

$$(5)\quad \xi = x' + X \quad , \quad \eta = y' + Y \quad , \quad \zeta = z' + Z \, .$$

X,Y,Z sînt coordonatele rectangulare ecuatoriale ale centrului Soarelui,măsurate deci în sistemul Ox'y'z'.Ele sînt cunoscute din studiul mișcării Pămîntului și publicate din zi în zi în anuarele astronomice mari (Connaissance des Temps,Nautical Almanac, Berliner Jahrbuch,American Ephemeris etc).Se mai notează aceste coordonate X_o,Y_o,Z_o în [2] p.191.

Pe de altă parte,coordonatele ξ,η,ζ se exprimă ușor în funcție de distanța ρ a planetei față de centrul Pămîntului și coordonatele sferice α și δ ,adică ascensia dreaptă și declinația. De unde,cu aportul lui (4)și(5),

$$(6)\quad \begin{cases} \rho \cos\delta \cos\alpha = a r \sin(A+\omega+v) + X \\ \rho \cos\delta \sin\alpha = b r \sin(B+\omega+v) + Y \\ \rho \sin\delta = c r \sin(C+\omega+v) + Z \end{cases}$$

2.3. ALGORITMI DE CALCUL.EXEMPLU NUMERIC

Cel mai simplu algoritm este cel prezentat în metoda de calcul de mai sus și comportă următoarele etape :

1. rezolvarea ecuației lui Kepler care dă anomalia excentrică E, apoi calculul anomaliei adevărate v și a razei vectoare r cu ajutorul respectiv al formulelor (16) și (14) din 1.3.pentru cazul eliptic,(18) și (17') din 1.5. în caz parabolic și (25) și (22) din 1.6. în cazul hiperbolic.Rezultă de aici și argumentul de latitudine,$u=\omega+v$;
2. calculul coordonatelor rectangulare ecuatoriale heliocentrice (x',y',z')cu (4),după ce găsisem din (3) constantele Gauss;

3.calculul coordonatelor rectangulare ecuatoriale geocentrice (ξ,η,ζ),cu ajutorul lui (5) ;

4.calculul coordonatelor sferice ecuatoriale geocentrice (α,δ) cu ajutorul lui (6).

Se poate demonstra cu uşurinţă că algoritmul propus de M.Alexescu în [2] p.188 şi abordat în lucrarea de faţă şi pe calculator este echivalent cu cel prezentat mai sus.

Un alt algoritm este cel indicat de V.Nadolschi în [7] p.31 şi comportă următoarele etape:

1.calculul coordonatelor sferice ecliptice heliocentrice ; aceasta avînd în prealabil calculate poziţia planetei pe orbita sa,adică r şi v pentru momentele de timp considerate ;

2.calculul coordonatelor rectangulare ecliptice heliocentrice;

3. ecliptice geocentrice;

4. sferice ecliptice geocentrice ;

5. sferice ecuatoriale geocentrice.

Metoda este mai lungă întrucît nu foloseşte schimbarea de axe (1')din 2.2. care exclude calculul în sistem ecliptic.

Vom aborda în cele ce urmează,cu ajutorul primului algoritm, următoarea

Aplicaţie :

Se cer poziţiile în coordonate ecuatoriale geocentrice ale micii planete Iris,pentru 1987,iunie 10,00.

Elementele orbitale sînt :

$T= 2447306.26553$

$\omega = 144^{o}.91224$

$i= 5^{o}.51299$

$e= 0.2296362$

$\Omega = 259^{o}.34756$

$a = 2.3855186$ UA

Convenim ca în aplicaţiile numerice să notăm prin punctul zecimal virgula obişnuită,aceasta pentru identificare cu calculatorul.

Soluţie : Cum, în cazul elipsei, ecuaţia lui Kepler este

$$E - e \sin E = M = \mu(t-T) \quad \text{cu} \quad \mu = \frac{k}{a^{3/2}}$$

rezultă în cazul de faţă

$$E - 0.2296362 \cdot \sin E = -1.6329927$$

Aceasta, rezolvată prin cîţiva paşi, furnizează

$$E = -1.8535126$$

şi din (16) 1.3. şi (14) 1.3. rezultă

$$v = -2.0691516 \quad \text{şi} \quad r = 2.538336$$

şi mai departe,

$$u = 0.4600441$$

Cu ajutorul formulelor (3) şi luînd $\varepsilon = 23^{\circ}.440915$ găsim

constantele

$$\begin{aligned} a &= 0.9955328 \\ b &= 0.925122 \\ c &= 0.3912332 \\ A &= 349^{\circ}.2992 \\ B &= 257^{\circ}.06856 \\ C &= 272^{\circ}.18972 \end{aligned}$$

cu care, venind în (4), rezultă

$$\begin{aligned} x' &= 0.6820138 \\ y' &= -2.2840827 \\ z' &= -0.872337 \end{aligned}$$

Luînd pentru coordonatele Soarelui la momentul căutat

$$\begin{aligned} X &= 0.2004393 \\ Y &= 0.913075 \\ Z &= 0.3959398 \end{aligned}$$

şi înlocuind în (6), ajungem la efemerida

$$\begin{aligned} \alpha &= 302^{\circ}.76747 \\ \delta &= -16^{\circ}.28765 \end{aligned}$$

fără a avea pretenţia ca toate zecimalele să fie exacte, în principal din cauza coordonatelor ecuatoriale ale Soarelui şi a lui ε care au fost calculate la rîndul lor pentru epoca căutată, şi nu extrase din Anuarul românesc cum ar fi trebuit, care nu le furnizează.

Calculele, ca de altfel în toate aplicaţiile numerice neprogramate ale acestei lucrări, au fost efectuate pe un minicalculator CASIO fx-39.

Observaţie : Pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii trigonometrice (3) şi (6) s-a folosit următoarea

Problemă : Dacă $a^2+b^2=1$, să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \sin h = a \\ \cos h = b \end{cases} \quad \text{cu necunoscuta } h \in [0, 2\pi)$$

Soluţie : Intrucît $\frac{\sin h}{\cos h} = tg\, h = \frac{a}{b}$,
ar rezulta $h = arc\,tg \frac{a}{b}$, dar funcţia tg ia valori în $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ care nu coincide cu intervalul din ipoteză. Vom distinge deci 4 cazuri, după cum necunoscuta h se găseşte în următoarele intervale:

1. $h \in [0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow a \geq 0,\ b > 0$.

Pe de altă parte, fie $h' = arc\,tg \frac{a}{b} \in [0, \frac{\pi}{2})$. Cum cele două intervale coincid, rezultă soluţia h=h'.

2. $h \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \Leftrightarrow a \geq 0,\ b < 0$ şi $h' = arc\,tg \frac{a}{b} \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$.

Intervalele sînt decalate prin π, de unde $h = h' + \pi$.

3. $h \in (\pi, \frac{3\pi}{2}) \Leftrightarrow a < 0,\ b < 0$ şi $h' = arc\,tg \frac{a}{b} \in (0, \frac{\pi}{2})$, de unde $h = h' + \pi$.

4. $h \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \Leftrightarrow a < 0,\ b > 0$ şi $h' = arc\,tg \frac{a}{b} \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ de unde $h = h' + 2\pi$.

Cazurile $h = \frac{\pi}{2}$, $h = \frac{3\pi}{2}$ sînt prinse pentru b=0 şi a>0, respectiv a<0.

Rezultă următorul

Algoritm :
1. dacă $b=0$ şi $a>0$, avem $h = \frac{\pi}{2}$
2. dacă $b=0$ şi $a<0$, avem $h = \frac{3\pi}{2}$
3. fie $h' = arc\,tg \frac{a}{b}$
4. fie $A = \begin{cases} 1 & \text{pentru } a \geq 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$ şi $H = \begin{cases} 1 & \text{pentru } h' \geq 0 \\ -1 & h' < 0 \end{cases}$
5. soluţia, în radiani, este

$$h = h' + \pi - (A + H) \cdot \frac{\pi}{2}$$