-CAPITOLUL IV-

DETERMINAREA ORBITEI PRIN OBSERVATII

Reprezintă calculul celor 6 elemente ale unei orbite urmată de un asteroid,o planetă sau o cometă,cunoscîndu-se un număr mic de observaţii ale astrului în cauză.

4.1. METODA LUI LAPLACE

A fost aplicată în anul 1780 şi se bazează pe cunoaşterea din observaţii a cosinuşilor direcţiei reale a unui astru la un moment dat în raport cu un sistem rectangular oarecare de coordonate, de asemenea derivatele de prim şi de secund ordin ale acestor cosinuşi.

Presupunem că axele de coordonate au direcţii fixe,cu originea în centrul Soarelui şi desemnăm prin

(1) X,Y,Z coordonatele observatorului în raport cu cele trei axe;

ρ distanţa necunoscută de la observator la astru;

ξ,η,ζ cosinuşii unghiurilor formate de direcţia care leagă observatorul de astru cu axele de coordonate;

x,y,z coordonatele heliocentrice ale astrului;

r distanţa de la astru la Soare.

Avem :

$$x = X + \rho\xi \tag{2}$$

$$y = Y + \rho\eta \tag{3}$$

$$z = Z + \rho\zeta \tag{4}$$

Ecuaţiile mişcării (12') din 1.2.se scriu,ţinînd cont de ultimele

$$\left\{\begin{aligned}
&\xi\frac{d^2\rho}{dt^2} + 2\frac{d\xi}{dt}\cdot\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{k^2\xi}{r^3}\right) + \frac{d^2X}{dt^2} + \frac{k^2X}{r^3} = 0\\
&\eta\frac{d^2\rho}{dt^2} + 2\frac{d\eta}{dt}\cdot\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{k^2\eta}{r^3}\right) + \frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{k^2Y}{r^3} = 0\\
&\zeta\frac{d^2\rho}{dt^2} + 2\frac{d\zeta}{dt}\cdot\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{k^2\zeta}{r^3}\right) + \frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{k^2Z}{r^3} = 0
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Ecuaţiile (5) conţin 4 necunoscute, $\rho, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d^2\rho}{dt^2}$ şi r ;ele sînt liniare în raport cu primele trei.

Pe de altă parte, din triunghiul Soare-observator-astru, dacă notăm cu ψ unghiul cu vîrful în observator şi cu R distanţa de la observator la Soare, avem

$$(6) \qquad r^2 = R^2 - 2\rho R \cos\psi + \rho^2$$

Dacă, printr-o combinaţie liniară de ecuaţii (5) se elimină $\frac{d\rho}{dt}$ şi $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, vom avea o ecuaţie care, legată de (6), va constitui un sistem permiţînd calculul lui ρ şi r ;se determină apoi $\frac{d\rho}{dt}$ şi se calculează derivatele coordonatelor la momentul t prin formulele

$$(7) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt} + \rho\frac{d\xi}{dt} + \xi\frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dY}{dt} + \rho\frac{d\eta}{dt} + \eta\frac{d\rho}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dZ}{dt} + \rho\frac{d\zeta}{dt} + \zeta\frac{d\rho}{dt} \end{cases}$$

Vom avea, prin (2),(3),(4)şi(7), coordonatele şi proiecţiile vitezei la momentul t şi se pot calcula, ca în paragraful precedent, elementele orbitei.

Acesta este principiul metodei Laplace. Pentru a forma din (5) ecuaţia care leagă pe r cu ρ, vom presupune că poziţia observatorului, pînă aici lăsată arbitrară, coincide cu centrul de masă al sistemului Pămînt-Lună, acest punct mişcîndu-se în jurul Soarelui după legile kepleriene; să desemnăm tot prin R distanţa de la acest punct la Soare, a.i.

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

Vom avea, neglijînd masa sistemului Pămînt-Lună faţă de cea a Soarelui, ecuaţia de mişcare a observatorului

$$(8) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} + \frac{k^2X}{R^3} = 0, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{k^2Y}{R^3} = 0, \quad \frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{k^2Z}{R^3} = 0$$

Dacă, după ce au fost substituite în (5) $\frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^2Y}{dt^2}, \frac{d^2Z}{dt^2}$, se consideră aceste ecuaţii ca liniare în raport cu necunoscutele $\rho, \frac{d\rho}{dt}, \frac{d^2\rho}{dt^2}$, determinantul sistemului se reduce la

$$(9) \qquad 2\Delta = 2\begin{vmatrix} \xi & \frac{d\xi}{dt} & \frac{d^2\xi}{dt^2} \\ \eta & \frac{d\eta}{dt} & \frac{d^2\eta}{dt^2} \\ \zeta & \frac{d\zeta}{dt} & \frac{d^2\zeta}{dt^2} \end{vmatrix}$$

Convenim să scriem, pentru prescurtare

(10) $$\Delta = \left| \xi \quad \frac{d\xi}{dt} \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} \right|$$

Vom avea atunci

(11) $$\rho = \frac{\left| \xi \quad \frac{d\xi}{dt} \quad X \right|}{\Delta} k^2 \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right)$$

Ecuaţiile (11) şi (6)permit deci calculul lui ρ şi r.

Lucrarea [1] efectuează la pag.105 o schimbare de variabile şi arată modul cum valorile ρ şi r pot fi calculate cu ajutorul tabelelor.De asemenea,la pag.109-114 este făcută o discuţie a ecuaţiei de gradul 8 care se obţine din (11)+(6) şi care se dovedeşte a avea nici una,una sau două soluţii reale.

Pentru obţinerea lui $\frac{d\rho}{dt}$,din ecuaţiile (5) găsim

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\left| \xi \quad X \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{k^2\xi}{r^3} \right|}{2\Delta} \cdot k^2 \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right)$$

Observînd că determinantul de la numărător este egal cu $\left| \xi \quad X \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} \right|$ deoarece $\left| \xi \quad X \quad \frac{k^2\xi}{r^3} \right|$ este nul,avînd două coloane proporţionale, rezultă

(12) $$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\left| \xi \quad X \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} \right|}{2\Delta} \cdot k^2 \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right)$$

4.2. ALGORITM DE CALCUL.EXEMPLU NUMERIC

Convenim să prescurtăm,dacă nu există confuzii asupra variabilei de derivare,prin $\dot{\xi} \div \frac{d\xi}{dt}$, $\ddot{\xi} \div \frac{d^2\xi}{dt^2}$ şamd.

Se cunosc $\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}$ şi,pe de altă parte, R, ψ, $X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$.

1.cu ecuaţiile (11)şi (6) găsim ρ şi r;

2.(12)furnizează $\dot{\rho}$;

3.formulele (2),(3),(4)şi (7) dau coordonatele astrului x, y, z şi derivatele lor,adică componentele vitezei, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$;

4.se calculează constantele c,c' şi c" cu formulele (2')3.1.;

5.din(2")3.1.calculăm $k^2\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right)$ şi de aici primul element,a;

6.rezultă p,i,Ω cu ajutorul lui (3)3.1.;

7.din 1.1.(xx) implică e ;

8.cu (3')3.1. rezultă u_0 şi cu 1.3.(15) implică v_0 şi mai departe,din $u_0 = \omega + v_0$,găsim ω ;

9.în caz eliptic rezultă E cu (16)1.3.şi apoi T din ecuaţia lui Kepler;

în caz parabolic rezultă T cu (18)1.5.şi în sfîrşit,

în caz hiperbolic,găsim N_0 cu (19)şi apoi T cu (23)din 1.6.toate aplicate la epoca t_0.

Aplicaţie :

Să se calculeze elementele orbitei cometei Encke care a fost observată la 5 ianuarie 1987 0^h,8 timp legal român,dacă se cunosc

$$\xi = 0.9254403 \qquad \dot{\xi} = 1.32765-03 \qquad \ddot{\xi} = 1.31567-05$$
$$\eta = -0.3719025 \qquad \dot{\eta} = 3.29176-03 \qquad \ddot{\eta} = 6.66958-05$$
$$\zeta = 0.0724478 \qquad \dot{\zeta} = -6.143-05 \qquad \ddot{\zeta} = 3.61001-07$$

$$X = 0.2205171 \qquad \dot{X} = -0.0170461 \qquad R = 0.9833$$
$$Y = 0.9582541 \qquad \dot{Y} = -3.9227-03 \qquad \Psi = 81^\circ.089794$$
$$Z = 2.59486-05 \qquad \dot{Z} = -1.5974-07$$

(aici,tot din considerente de afişaj,am notat prin 1.32765-03 numărul 1.32765 multiplicat cu 10^{-3}).

Soluţie : Rezultă,după dezvoltarea determinanţilor

$$\rho = 3.3940356 \cdot \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)$$

şi dacă formăm ecuaţia de gradul 8 în r din sistemul (11)+(6), aceasta trebuie să aibă o singură soluţie pozitivă,pe care o găsim după cîţiva paşi prin metoda înjumătăţirii intervalelor :

$$r = 3.4752882$$

Mai departe,din ecuaţia de gradul 2 în ρ oprim $\rho > 0$

$$\rho = 3.4890563$$

şi mergînd în formula care îl dă pe $\dot{\rho}$,

$$\dot{\rho} = 8.79698-03$$

Urmează

$$x = 3.4494304 \qquad \dot{x} = -4.2727-03$$
$$y = -0.3393346 \quad \text{şi} \quad \dot{y} = 4.29081-03$$
$$z = 0.2528004 \qquad \dot{z} = 4.22829-04$$

Calculăm valorile constantelor :

$$c = -1.2281-03$$
$$c' = -2.5386-03$$
$$c'' = 0.0133509$$

şi din ecuaţia

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = 3.68458-05 = k^2\left(\frac{2}{r_0}-\frac{1}{a}\right)$$

rezultă

$$a = 2.2174135$$

Din primele două ecuații (3)3.1.găsim

$$\Omega = 5.8326054$$

din a doua și a treia

$$i = 0.2112259$$

iar din ultima rezultă

$$p = 0.6300581$$

Mai departe,

$$e = 0.8460845$$

și din (3')3.1.găsim

$$\mu = 0.3598667$$

Pentru v rezultă

$$v = -2.8864916$$

și de aici

$$\omega = 3.2463583$$

Ecuația în E și v ne furnizează

$$E = 3.9775519$$

și în sfîrșit,ecuația lui Kepler dă trecerea la periheliu.

Prezentăm mai jos tabelul cuprinzînd elementele calculate,alături de cele furnizate de Anuarul Astronomic'87 pag.164:

	Calculate	Publicate
a	2.2174135	2.2175
e	0.8460845	0.8463
ω	$186^{\circ}.00262$	$185^{\circ}.9962$
Ω	$334^{\circ}.18367$	$334^{\circ}.1823$
i	$12^{\circ}.102352$	$11^{\circ}.9273$

4.3. METODA LUI GAUSS

A fost aplicată de autor cu ocazia descoperirii primului asteroid, Ceres, la 1 ianuarie 1801 şi se bazează pe cunoaşterea din observaţii, la trei momente de timp, a coordonatelor (ecliptice sau ecuatoriale) ale astrului.

Notaţiile vor fi analoage celor precedente :

X_i, Y_i, Z_i coordonatele centrului Pămîntului la epoca $t_i (i=\overline{1,3})$ în raport cu un sistem cartezian heliocentric;

ρ_i distanţa de la astru la observator ;

ξ_i, η_i, ζ_i cosinuşii directori ai dreptei T_iP_i; unde

T_i poziţia observatorului la momentul t_i; iar

P_i poziţia astrului la momentul t_i;

x_i, y_i, z_i coordonatele astrului în sistemul ales;

r_i distanţa de la Soare la astru;

R_i distanţa de la Pămînt la Soare.

Vom avea

(13) $x_i = \rho_i \xi_i + X_i \quad , \quad y_i = \rho_i \eta_i + Y_i \quad , \quad z_i = \rho_i \zeta_i + Z_i$

Vom exprima faptul că cele trei poziţii $P_i(x_i, y_i, z_i)$ sînt într-un plan trecînd prin origine , prin relaţia

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

care provine din scrierea volumului nul al corpului $SP_1P_2P_3$, analog cu formula ariei folosită în primul capitol.

Determinantul ultim dă

$$x_1(y_2z_3 - z_2y_3) - x_2(y_1z_3 - z_1y_3) + x_3(y_1z_2 - z_1y_2) = 0$$

Coeficientul lui x_1 este proiecţia pe planul yz al dublului ariei triunghiului rectiliniu (adică laturile sale sînt segmente de dreaptă) ale cărui două laturi sînt razele vectoare r_2 şi r_3.

Vom desemna aceste dubluri de arii de triunghiuri formate cu cîte două din razele vectoare prin

$$[r_2 r_3] \quad , \quad [r_1 r_3] \quad , \quad [r_1 r_2]$$

şi vom remarca că cele trei paranteze ale ultimei ecuaţii se obţin înmulţind dublul acestor arii prin cosinuşii unghiului dintre planul orbitei şi planul yz;avem deci,prin permutări

$$(14)\quad \begin{cases} x_1 [r_2 r_3] - x_2 [r_1 r_3] + x_3 [r_1 r_2] = 0 \\ y_1 [r_2 r_3] - y_2 [r_1 r_3] + y_3 [r_1 r_2] = 0 \\ z_1 [r_2 r_3] - z_2 [r_1 r_3] + z_3 [r_1 r_2] = 0 \end{cases}$$

unde s-a făcut în fiecare ecuaţie simplificarea prin dublul cosinuşilor unghiurilor dintre plane.

Dacă în (14)se înlocuiesc x_1, y_1, z_1 prin expresiile lor din(13), avem un sistem de trei ecuaţii liniare în raport cu ρ_1, ρ_2, ρ_3, dar ale căror coeficienţi sînt ariile necunoscute ale triunghiurilor rectilinii considerate ; se notează

$$(15)\quad n_1 = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} \quad , \quad n_3 = \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}$$

Impărţind prin $[r_1 r_3]$ecuaţiile (14),după înlocuire găsim

$$(16)\quad \begin{cases} \rho_1 n_1 \xi_1 - \rho_2 \xi_2 + \rho_3 n_3 \xi_3 + n_1 X_1 - X_2 + n_3 X_3 = 0 \\ \rho_1 n_1 \eta_1 - \rho_2 \eta_2 + \rho_3 n_3 \eta_3 + n_1 Y_1 - Y_2 + n_3 Y_3 = 0 \\ \rho_1 n_1 \zeta_1 - \rho_2 \zeta_2 + \rho_3 n_3 \zeta_3 + n_1 Z_1 - Z_2 + n_3 Z_3 = 0 \end{cases}$$

de unde,rezolvînd în raport cu ρ_2 şi ţinînd seama de proprietăţile elementare ale determinanţilor şi de notaţiile făcute deja,găsim

$$(17)\quad \rho_2 \left| \xi_1 \xi_2 \xi_3 \right| = \left| \xi_1 \xi_3 X_2 \right| - n_1 \left| \xi_1 \xi_3 X_1 \right| - n_3 \left| \xi_1 \xi_3 X_3 \right|$$

Această ecuaţie joacă un rol capital în metoda lui Gauss:rapoartele n_1 şi n_3 ,definite prin (15),nu sînt cunoscute;dar vom vedea în paragraful următor că se pot dezvolta în serie de puteri de t_2-t_1 şi t_3-t_2,coeficienţii acestor serii depinzînd de r_2 şi de derivata$\left(\frac{dr}{dt}\right)_2$ la momentul t_2;în primii termeni ai acestor serii nu figurează decît r_2.

Principiul metodei este atunci următorul :se înlocuiesc n_1 şi n_3 prin expresii aproximative,care conţin numai necunoscuta r_2, în ecuaţia (17);la aceasta se alătură

$$(18)\quad r_2^2 = \rho_2^2 - 2\rho_2 R_2 \cos \psi_2 + R_2^2$$

şi se obţine un sistem permiţînd determinarea aproximativă a lui ρ_2 şi a lui r_2.

Pe de altă parte, folosind proprietăţi ale determinanţilor, tot din (16), găsim:

$$(19)\quad \begin{cases} n_1\rho_1 |\xi_1\ X_3\ \xi_3| = \rho_2 |\xi_2\ X_3\ \xi_3| - n_1 |\xi_3 X_1 X_3| + |\xi_3 X_2 X_3| \\ n_3\rho_3 |\xi_1\ X_1\ \xi_3| = \rho_2 |\xi_1\ X_1\ \xi_2| - n_3 |\xi_1 X_1 X_3| + |\xi_1 X_1 X_2| \end{cases}$$

Se folosesc aceste rezultate ale primei aproximaţii pentru ameliorarea valorilor n_1 şi n_3 care au servit la primul calcul şi se reîncep operaţiile pînă ce se obţin valori suficient de exacte.

4.4. EXPRESIILE ARIILOR TRIUNGHIURILOR ŞI RAPOARTELE LOR ÎN FUNCŢIE DE TIMP

Să alegem, pentru simplificarea calculului, sistemul de axe a.i. planul xy să coincidă cu planul orbitei ; avem atunci

$$[r_1 r_2] = x_1 y_2 - y_1 x_2 \quad , \quad [r_2 r_3] = x_2 y_3 - y_2 x_3 \quad ,$$
$$[r_1 r_3] = x_1 y_3 - y_1 x_3$$

Să schimbăm unitatea de timp, punînd $\tau \div t k$ (k-constanta lui Gauss).

Ecuaţiile (12')1.2. devin atunci

$$(20)\quad \frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{x}{r^3} = 0 \quad , \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{y}{r^3} = 0$$

Punînd, pe de altă parte, dacă τ_0 este epoca iniţială,

$$\tau - \tau_0 \div \theta$$

apoi dezvoltînd pe x în serie Taylor,

$$(21)\quad x = x_0 + \theta\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_0 + \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}\right)_0 + \frac{\theta^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^3x}{d\tau^3}\right)_0 + \dots$$

înlocuim derivatele succesive în raport cu expresiile care se deduc din (20), adică

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}$$
$$\frac{d^3x}{d\tau^3} = -\frac{1}{r^3}\frac{dx}{d\tau} + \frac{3x}{r^4}\frac{dr}{d\tau}$$
$$\frac{d^4x}{d\tau^4} = \frac{x}{r^6} + \frac{6}{r^4}\frac{dx}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} + 3x\left[\frac{1}{r^4}\frac{d^2r}{d\tau^2} - \frac{4}{r^5}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\right]$$
$$- - - - - - - - - - - -$$

Găsim, prin înlocuire în (21):

$$(22)\quad x = x_0 F(\theta) + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)_0 G(\theta)$$

unde funcţiile $F(\theta)$ şi $G(\theta)$ sînt două serii în θ:

$$(23)\quad \begin{cases} F(\theta) = 1 - \dfrac{\theta^2}{2r_0^3} + \dfrac{\theta^3}{2r_0^4}\left(\dfrac{dr}{d\tau}\right)_0 + \dots \\ G(\theta) = \theta - \dfrac{\theta^3}{6r_0^3} + \dfrac{\theta^4}{4r_0^4}\left(\dfrac{dr}{d\tau}\right)_0 + \dots \end{cases}$$

Să luăm, drept moment inițial, momentul de observație mijlociu, pe care îl notăm cu τ_2, și să punem

$$(24)\quad \theta_1 \doteq \tau_3 - \tau_2 = k(t_3 - t_2)\,;\quad \theta_3 \doteq \tau_2 - \tau_1 = k(t_2 - t_1)\,;$$
$$\theta_2 \doteq k(t_3 - t_2) = \theta_1 + \theta_3$$

Aplicînd (22) pentru x_3, y_3, x_1, y_1, găsim

$$(25)\quad \begin{cases} x_3 = x_2 F(\theta_1) + \dfrac{dx_2}{d\tau} G(\theta_1) \\ y_3 = y_2 F(\theta_1) + \dfrac{dy_2}{d\tau} G(\theta_1) \\ x_1 = x_2 F(-\theta_3) + \dfrac{dx_2}{d\tau} G(-\theta_3) \\ y_1 = y_2 F(-\theta_3) + \dfrac{dy_2}{d\tau} G(-\theta_3) \end{cases}$$

unde s-a notat, pentru comoditate, $\dfrac{dx_2}{d\tau} \doteq \left(\dfrac{dx}{d\tau}\right)_2$ etc.

Avem atunci

$$[r_1 r_2] = x_1 y_2 - y_1 x_2 = \left(y_2 \frac{dx_2}{d\tau} - x_2 \frac{dy_2}{d\tau}\right) G(-\theta_3)$$

Dar expresia din paranteză este egală cu constanta ariilor cu semn schimbat; cu unitatea de timp t am văzut că această constantă avea valoarea $k\sqrt{p}$, cu p parametrul orbitei; cum noua unitate de timp este $\tau = tk$, dublul ariei descrise în unitatea de timp este $\sqrt{p}$; avem deci

$$[r_1 r_2] = -\sqrt{p}\, G(-\theta_3)$$

și, de asemenea

$$[r_2 r_3] = \sqrt{p}\, G(\theta_1)$$

Pentru calculul lui $[r_1 r_3]$, se scrie expresia sa sub formă de determinant $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$. Ținînd seama că dacă se schimbă liniile cu coloanele, determinantul are aceeași valoare, găsim, înlocuind expresiile x_1 șamd prin (25) :

$$[r_1 r_3] = \sqrt{p}\,\{F(-\theta_3)\, G(\theta_1) - F(\theta_1)\, G(-\theta_3)\}$$

Din (23), pentru variabilele θ_1, $-\theta_3$ găsim

$$F(\theta_1) = 1 - \frac{\theta_1^2}{2r_2^3} + \frac{\theta_1^3}{2r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots$$

$$G(\theta_1) = \theta_1\left(1 - \frac{\theta_1^2}{6r_2^3} + \frac{\theta_1^3}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots\right)$$

$$F(-\theta_3) = 1 - \frac{\theta_3^2}{2r_2^3} - \frac{\theta_3^3}{2r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots$$

$$G(-\theta_3) = -\theta_3\left(1 - \frac{\theta_3^2}{6r_2^3} - \frac{\theta_3^3}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots\right)$$

Vom avea, după ce vom grupa corespunzător,

$$F(-\theta_3)G(\theta_1) - F(\theta_1)G(-\theta_3) = \theta_1 + \theta_3 -$$
$$-\frac{1}{6r_2^3}\left(\theta_1^3 + 3\theta_1^2\theta_3 + 3\theta_1\theta_3^2 + \theta_3^3\right) + \frac{1}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau}\left[\theta_1^4 - \theta_3^4 + 2\theta_1\theta_3(\theta_1^2 - \theta_3^2)\right] + \dots\dots$$

După ultima formulă (24), $\theta_2 = \theta_1 + \theta_3$ deci expresia de calculat se reduce la $\theta_2\left[1 - \frac{\theta_2^2}{6r_2^3} + \frac{\theta_2^2(\theta_1 - \theta_3)}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots\right]$

Rezultă în final

$$(26)\quad \begin{cases} [r_2 r_3] = \theta_1\sqrt{p}\left(1 - \frac{\theta_1^2}{6r_2^3} + \frac{\theta_1^3}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots\right) \\ [r_1 r_2] = \theta_3\sqrt{p}\left(1 - \frac{\theta_3^2}{6r_2^3} - \frac{\theta_3^3}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots\right) \\ [r_1 r_3] = \theta_2\sqrt{p}\left(1 - \frac{\theta_2^2}{6r_2^3} + \frac{\theta_2^2(\theta_1 - \theta_3)}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots\right) \end{cases}$$

Ţinînd cont de aproximarea $(1-\alpha)^{-1} = 1+\alpha$ pentru numere α suficient de mici, de asemenea că $\theta_2 = \theta_1 + \theta_3$ şi luînd termenii doar pînă la r_2^{-4}, găsim

$$(27)\quad \begin{cases} n_1 = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{\theta_1}{\theta_2}\left[1 + \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{6r_2^3} + \frac{\theta_3(\theta_2\theta_3 - \theta_1^2)}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots\right] \\ n_3 = \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{\theta_3}{\theta_2}\left[1 + \frac{\theta_2^2 - \theta_3^2}{6r_2^3} - \frac{\theta_1(\theta_2\theta_1 - \theta_3^2)}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots\right] \end{cases}$$

Să figurăm cele trei poziţii P_1, P_2, P_3 şi să trasăm (figura 6) laturile triunghiurilor ; avem

$$(27')\quad n_1 = \frac{\mathcal{A}(SP_2P_3)}{\mathcal{A}(SP_1P_3)} \qquad n_3 = \frac{\mathcal{A}(SP_1P_2)}{\mathcal{A}(SP_1P_3)}$$

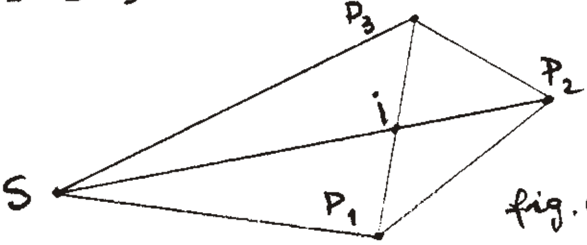

fig. 6

Raportul $\frac{n_3}{n_1}$ este acelaşi cu cel al ariilor triunghiurilor SP_1P_2 şi SP_2P_3 şi se pot considera acestea ca avînd aceeaşi bază SP_2; ariile sînt atunci în acelaşi raport ca şi înălţimile, sau încă acelaşi raport cu cel al distanţelor P_1I şi P_3I, unde I este punctul de întîlnire al coardei P_1P_3 cu raza vectoare SP_2.

Se obţine

$$(28)\quad \frac{n_3}{n_1} = \frac{P_1 I}{P_3 I} = \frac{\theta_3}{\theta_1}\left(1 + \frac{\theta_1^2 - \theta_3^2}{6r_2^3} - \frac{\theta_1^3 + \theta_3^3}{4r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots\right)$$

Acest raport poate fi aproximat cu $\frac{\theta_3}{\theta_1}$; acest fapt se poate verifica uşor înlocuind raportul de arii de triunghiuri prin cel de arii de sectoare eliptice cuprinse între razele corespunzătoare şi aplicînd legea ariilor,sectoarele eliptice diferînd de triunghiuri prin cantităţi de ordin secund;calculul ne dă un rezultat foarte important,anume dacă $\theta_3=\theta_1$,adică datele de observaţie extreme sînt echidistante de cea intermediară,diferenţa între $\frac{m_3}{m_1}$ şi $\frac{\theta_3}{\theta_1}$ coboară sub ordinul trei.

În calcule,vom fi conduşi să introducem combinaţii care să fie uşor de format cu ajutorul dezvoltărilor (27):

1.Suma n_1+n_3,care este raportul suprafeţei patrulaterului $SP_1P_2P_3$ la aria triunghiului SP_1P_3 are expresia

$$(29)\qquad m_1+m_3 = 1+\frac{\theta_1\theta_3}{2r_2^3}-\frac{\theta_1\theta_3(\theta_1-\theta_3)}{2r_2^4}\frac{dr_2}{d\tau}+\dots$$

2.Dublul suprafeţei triunghiului $P_1P_2P_3$,notat prin Σ este dat de relaţia

$$\Sigma = [r_2r_3]+[r_1r_2]-[r_1r_3]=[r_1r_3](m_1+m_3-1)$$

Dacă se ţine cont de formulele (29)şi(26),rezultă

$$(30)\qquad \Sigma = \sqrt{p}\,\frac{\theta_1\theta_2\theta_3}{2r_2^3}\left(1+\frac{\theta_3-\theta_1}{r_2}\frac{dr_2}{d\tau}+\dots\right)$$

3.Formula(29)permite,în fine,obţinerea lungimii P_2I,care se numeşte săgeata arcului de curbă cuprins între P_1şi P_3;considerînd triunghiul $P_1P_2P_3$ cu baza P_1P_3 ,avem

$$\frac{P_2I}{r_2}=\frac{2\mathcal{A}(P_1P_2P_3)}{2\mathcal{A}(SP_1P_2P_3)}=\frac{\Sigma}{[r_1r_2]+[r_2r_3]}=\frac{m_1+m_3-1}{m_1+m_3}$$

şi,în consecinţă,

$$(31)\qquad P_2I=\frac{\theta_1\theta_3}{2r_2^2}-\frac{\theta_1\theta_3(\theta_1-\theta_3)}{2r_2^3}\frac{dr_2}{d\tau}+\dots$$

4.5. DISCUŢIA ECUAŢIILOR LUI GAUSS ; APROXIMAŢII SUCCESIVE

Fie t o epocă vecină datelor de observaţie t_1,t_2 şi t_3 şi fie ξ,η,ζ cosinuşii directori ai direcţiei geocentrice a astrului la epoca t ; avem

$$\xi_i = \xi+(t_i-t)\frac{d\xi}{dt}+\frac{(t_i-t)^2}{2}\frac{d^2\xi}{dt^2}+\dots\quad ; i=1,2,3$$

şi expresiile analoage în η şi ζ ; după regulile elementare ale determinanţilor,găsim

$$|\xi_1\xi_2\xi_3| = \left|\xi\ \frac{d\xi}{dt}\ \frac{d^2\xi}{dt^2}\right|\cdot\left|1\ (t_1-t)\ \frac{(t_1-t)^2}{2}\right|$$

şi ultimul determinant este de ordinul trei , deci $|\xi_1\xi_2\xi_3|$este de acelaşi ordin. Se poate dovedi, printr-un raţionament analog, că ceilalţi determinanţi care apar în ecuaţia fundamentală (17) sînt de prim ordin. Prin urmare, dacă presupunem ecuaţia rezolvată în raport cu ρ_2,

(32) $\rho_2 = b_2 - n_1 b_1 - n_3 b_3$ unde

(32') $b_1 \doteq \dfrac{|\xi_1 \xi_3 X_1|}{|\xi_1 \xi_2 \xi_3|}$; $b_2 \doteq \dfrac{|\xi_1 \xi_3 X_2|}{|\xi_1 \xi_2 \xi_3|}$; $b_3 = \dfrac{|\xi_1 \xi_3 X_3|}{|\xi_1 \xi_2 \xi_3|}$

sînt foarte mari, de ordinul -2 în raport cu intervalele mici de timp, a.i. dacă se substituie în loc de n_1 şi n_3 valori de ordin p, ecuaţia (32) dă pentru ρ_2 o valoare de ordin p-2 numai. Dacă ne limităm la a lua pentru n_1 şi n_3 din(27) $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ respectiv $\frac{\theta_3}{\theta_2}$, nu se poate garanta, în calculul lui ρ_2 prin (32) că suprimăm eroarea de ordin zero : ceea ce înseamnă că determinarea nu oferă nici un caracter de precizie.

Este deci necesar, dacă dorim să aplicăm procedeul indicat pînă aici, să luăm pentru n_1 şi n_3 expresii de ordinul 3 cel puţin. Gauss a preferat să transforme ecuaţia fundamentală (17) introducînd, în locul lui n_1 şi al lui n_3, două cantităţi P şi Q definite:

(33) $\dfrac{n_3}{n_1} \doteq P$; $n_1 + n_3 - 1 \doteq \dfrac{Q}{2r_2^3}$

Ecuaţia (32) se scrie atunci

(34) $\rho_2 = b_2 - \dfrac{b_1 + P b_3}{1+P}\left(1 + \dfrac{Q}{2r_2^3}\right)$;

Să punem, mai departe

(35) $\dfrac{b_1 + P b_3}{1+P} \doteq c$, $b_2 - c = K$, $\dfrac{cQ}{2} \doteq l$

Inlocuind în (34) şi adăugînd la această relaţia care leagă r_2 de ρ_2, în triunghiul SP_2T_2, obţinem:

(36) $\begin{cases} \rho_2 = K - l/r_2^3 \\ r_2^2 = \rho_2^2 - 2\rho_2 R_2 \cos\psi_2 + R_2^2 \end{cases}$

adică un sistem analog cu (11)+(6) din metoda lui Laplace.

Întrucît erorile comise în calculul coeficienţilor K şi l sînt de primul ordin, se obţin, rezolvînd sistemul (36), valori pentru ρ_2 şi r_2 afectate de erori de ordinul întîi.

Formulele (19) le transcriem sub forma

(37) $\begin{cases} n_1\rho_1 = a_2\rho_2 - a_1 n_1 + a_3 \\ n_3\rho_3 = c_2\rho_2 - c_3 n_3 + c_1 \end{cases}$

unde, de exemplu

$$a_2 \doteq \frac{|\xi_2\ \xi_3\ X_3|}{|\xi_1\ \xi_3\ X_3|}\ ,\quad a_1 \doteq \frac{|X_1\ X_3\ \xi_3|}{|\xi_1\ X_3\ \xi_3|}\ ,\quad a_3 \doteq \frac{|X_2\ X_3\ \xi_3|}{|\xi_1\ X_3\ \xi_3|}$$

Înlocuind în (37) n_1 şi n_3 prin $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ şi $\frac{\theta_3}{\theta_2}$, avem deci şi pentru ς_1 şi ς_3 erori tot de ordinul întîi.

Fie y_3 şi y_1 rapoartele sectoarelor eliptice SP_1P_2, SP_2P_3 la triunghiurile rectilinii corespunzătoare ; avem :

$$(38)\qquad y_3 = \frac{\theta_3\sqrt{p}}{[r_1 r_2]}\ ,\qquad y_1 = \frac{\theta_1\sqrt{p}}{[r_2 r_3]}$$

şi deci, folosind (27'),

$$(39)\qquad P = \frac{n_3}{n_1} = \frac{[r_1 r_2]}{[r_2 r_3]} = \frac{\theta_3}{\theta_1}\cdot\frac{y_1}{y_3}$$

Dacă, pe de altă parte, căutăm elementele e şi ω, avem

$$\frac{p}{r_i} = 1 + e\cos(u_i - \omega) \quad \text{cu} \quad i = 1,2,3$$

unde u_i sînt argumentele de latitudine; aceste trei ecuaţii care sînt liniare în $e\cdot\cos\omega$ şi $e\cdot\sin\omega$, trebuie să fie compatibile; vom avea deci

$$\left|\ \frac{p}{r_1} - 1 \qquad \cos u_1 \qquad \sin u_1\ \right| = 0$$

sau, dezvoltînd, după ce am pus

$$u_2 - u_1 \doteq 2f_3\ ;\ u_3 - u_2 \doteq 2f_1\ ;\ u_3 - u_1 \doteq 2f_2 \Rightarrow$$

$$p\left(\frac{\sin 2f_1}{r_1} - \frac{\sin 2f_2}{r_2} + \frac{\sin 2f_3}{r_3}\right) = \sin 2f_1 - \sin 2f_2 + \sin 2f_3$$

De vreme ce avem $f_2 = f_3 + f_1$, membrul doi este egal cu

$$4\sin f_1 \sin f_2 \sin f_3\ ;$$

pe de altă parte, avem

$$[r_1 r_2] = r_1 r_2 \sin 2f_3\ ,\quad [r_1 r_3] = r_1 r_3 \sin 2f_2\ ,$$
$$[r_2 r_3] = r_2 r_3 \sin 2f_1\ .$$

Cu formulele (27) rezultă deci

$$(40)\qquad p\,\frac{\sin 2f_2}{r_2}\,(n_1 + n_3 - 1) = 4\sin f_1 \sin f_2 \sin f_3$$

dar, înmulţind membru cu membru ecuaţiile (38), găsim

$$p = \frac{y_1 y_3}{\theta_1\theta_3}\,[r_1 r_2][r_2 r_3] = \frac{y_1 y_3}{\theta_1\theta_3}\, r_1 r_2^2 r_3 \sin 2f_1 \sin 2f_3$$

Relaţia (40) devine

$$n_1 + n_3 - 1 = \frac{\theta_1\theta_3}{y_1 y_3}\cdot\frac{1}{2 r_1 r_2 r_3 \cos f_1 \cos f_2 \cos f_3}$$

Privind şi formula (33) care îl defineşte pe Q, avem deci

$$(41)\qquad Q = \frac{\theta_1\theta_3}{y_1 y_3}\cdot\frac{r_2^2}{r_1 r_3}\cdot\frac{1}{\cos f_1 \cos f_2 \cos f_3}$$

Formulele (39) şi (41) furnizează valori apropiate ale lui P şi Q. Se mai demonstrează în [1] pag. 139-140 că, dacă eroarea care dă razele vectoare şi unghiurile care le fixează direcţia este de ordinul θ^{p}, atunci eroarea comisă în calculul lui P este de ordinul θ^{p+2} iar cea în calculul lui Q este de ordinul θ^{p+3}.

Inlocuind P şi Q în formulele (35), vom avea pentru coeficienţii ecuaţiei (36) valori de ordinul p+1 ; avem deci un veritabil procedeu de aproximaţii succesive.

4.6.. CALCULUL COEFICIENŢILOR ECUAŢIEI CARE DĂ ρ_2 ŞI r_2

Observaţiile dau , fie ascensiile drepte şi declinaţiile astrului la epocile t_1, t_2, t_3, fie longitudinile şi latitudinile geocentrice (λ_i, β_i) ale celor trei direcţii ale astrului la momentele t_1, t_2, t_3 ; vom lucra în situaţia de faţă prin cea de-a doua variantă, alegînd deci ca plan fundamental pe cel al eclipticii şi presupunînd centrul Pămîntului situat totdeauna în ecliptică.

Fie (figura 7) pe sfera cerească de centru S , poziţia T_2 a Pămîntului la momentul t_2 şi P_2 intersecţia sferei cereşti de rază R_2 cu paralela la direcţia geocentrică a astrului A_2, paralelă dusă prin S; arcul $\widehat{T_2P_2} \div \delta$ este unghiul format de

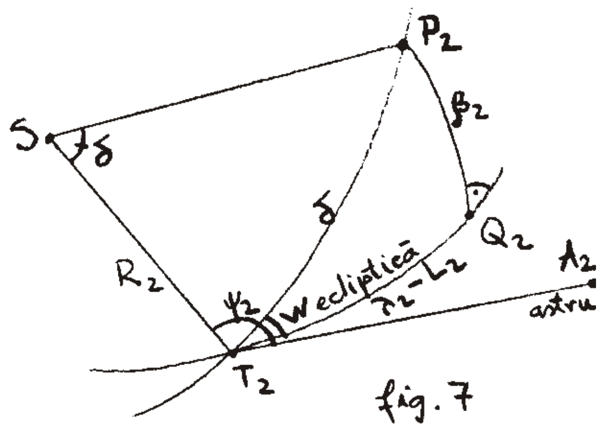

fig. 7

SP_2 cu ST_2 şi are, în consecinţă $\delta+\psi_2=180^{\circ}$, deoarece SP_2 şi T_2A_2 sînt paralele; distanţa unghiulară P_2Q_2 a lui P_2 la ecliptică este latitudinea β_2 ; în fine, arcul T_2Q_2 este diferenţa λ_2-L_2 a longitudinii geocentrice a astrului, λ_2 şi a longitudinii L_2 a Terrei.

In triunghiul sferic $T_2P_2Q_2$ avem, dacă notăm prin w unghiul din T_2, aplicînd formulele clasice (de ex. [6] p.14, (1.14)),

$$(41') \quad \begin{cases} \sin w \sin \delta = \sin \beta_2 \\ \cos w \sin \delta = \cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2) \\ \cos \delta = \cos \beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2) \end{cases} ;$$

aceste formule determină complet unghiul δ ;avem atunci

(42) $\quad r_2^2 = \rho_2^2 + 2\rho_2 R_2 \cos\delta + R_2^2$

Fie punctul de intersecţie al lui SP_2 cu sfera cerească de rază 1.Să remarcăm coordonatele rectangulare heliocentrice ale acestui punct care sînt chiar (ξ_2, η_2, ζ_2) adică cosinuşii directori ai lui T_2A_2.

În general,în raport cu acest sistem rectangular ecliptic,avem

$$\xi_i = \cos\lambda_i \cos\beta_i \quad , \quad \eta_i = \sin\lambda_i \cos\beta_i \quad , \quad \zeta_i = \sin\beta_i \quad ; i = \overline{1,3}$$

Avem de calculat determinantul

$$|\xi_1\ \xi_2\ \xi_3| = \begin{vmatrix} \cos\lambda_1\cos\beta_1 & \sin\lambda_1\cos\beta_1 & \sin\beta_1 \\ \cos\lambda_2\cos\beta_2 & \sin\lambda_2\cos\beta_2 & \sin\beta_2 \\ \cos\lambda_3\cos\beta_3 & \sin\lambda_3\cos\beta_3 & \sin\beta_3 \end{vmatrix}$$

$$= \cos\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3 \begin{vmatrix} \cos\lambda_1 & \sin\lambda_1 & tg\,\beta_1 \\ \cos\lambda_2 & \sin\lambda_2 & tg\,\beta_2 \\ \cos\lambda_3 & \sin\lambda_3 & tg\,\beta_3 \end{vmatrix}$$

În ultimul determinant se înmulţeşte prima coloană cu $tg\,\varphi \sin\chi$, a doua cu $-tg\,\varphi\cos\chi$ şi se adună la a treia.Se notează,introducînd noi variabile,

(43) $\quad tg\,\beta_0 = tg\,\varphi \sin(\lambda_2 - \chi)$

iar noile variabile φ şi χ se supun condiţiilor

(44) $\quad tg\,\beta_1 - tg\,\varphi\sin(\lambda_1-\chi)=0 \ , \ tg\,\beta_3 - tg\,\varphi\sin(\lambda_3-\chi)=0$

Vom avea în ultimul determinant două zerouri în ultima coloană şi dezvoltînd după aceasta,rezultă

(45) $\quad |\xi_1\ \xi_2\ \xi_3| = -(tg\,\beta_2 - tg\,\beta_0)\sin(\lambda_3-\lambda_1)\cos\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3$

Pentru a determina unghiurile φ şi χ ,care intervin în calculul lui β_0,ne vom servi de două combinaţii deduse din (44) prin adunare şi scădere :

$$(46) \quad \begin{cases} tg\,\varphi \sin\left(\dfrac{\lambda_1+\lambda_3}{2} - \chi\right) = \dfrac{\sin(\beta_1+\beta_3)}{2\cos\beta_1\cos\beta_3\cos\dfrac{\lambda_3-\lambda_1}{2}} \\ tg\,\varphi \cos\left(\dfrac{\lambda_1+\lambda_3}{2} - \chi\right) = \dfrac{\sin(\beta_3-\beta_1)}{2\cos\beta_1\cos\beta_3\sin\dfrac{\lambda_3-\lambda_1}{2}} \end{cases}$$

Interpretarea variabilelor φ şi χ se face cu uşurinţă : dacă construim cercul mare care trece prin punctele P_1 şi P_3 ,acest cerc taie ecliptica în două puncte;luînd unul dintre acestea(să zicem P_1)şi construind cu nodul

orbitei cel mai apropiat lui

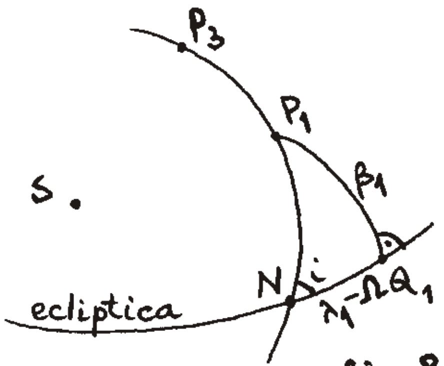

fig. 8

P_1 şi cu piciorul perpendicularei Q_1 pe ecliptică (figura 8) triunghiul sferic corespunzător, formulele lui Gauss dau ([6], pag. 15, problema 1.7):

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \operatorname{tg} i \sin(\lambda_1 - \Omega)$$

şi analog pentru punctul P_3, de unde se deduce cu (44) că χ este longitudinea nodului cel mai apropiat, iar φ este înclinarea cercului pe ecliptică.

Expresiile celorlalţi coeficienţi ai ecuaţiei fundamentale, $|\xi_1\xi_3 X_1|, |\xi_1\xi_3 X_2|, |\xi_1\xi_3 X_3|$, se obţin într-un mod analog, introducînd aceleaşi unghiuri auxiliare φ şi χ; amintindu-ne poziţia Pămîntului în ecliptică, avem, de exemplu

$$|\xi_1\xi_3 X_1| = \cos\beta_1\cos\beta_3 \begin{vmatrix} \cos\lambda_1 & \sin\lambda_1 & \operatorname{tg}\beta_1 \\ \cos\lambda_3 & \sin\lambda_3 & \operatorname{tg}\beta_3 \\ R_1\cos L_1 & R_1\sin L_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -R_1 \operatorname{tg}\varphi \sin(L_1-\chi)\sin(\lambda_3-\lambda_1)\cos\beta_1\cos\beta_3$$

Ecuaţia fundamentală (17) ia atunci forma

$$(47)\quad \begin{cases} \rho_2\cos\beta_2 \dfrac{\operatorname{tg}\beta_2-\operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\varphi} = R_2\sin(L_2-\chi) - \\ \quad - n_1R_1\sin(L_1-\chi) - n_3R_3\sin(L_3-\chi) \end{cases}$$

Se poate reduce membrul doi la doi termeni, dacă se introduc cantităţile N_1 şi N_3 -omoloagele lui n_1 şi n_3 în cazul Pămîntului; ecuaţia (47) aplicată în cazul Pămîntului pentru $\rho_2 = 0$ va da:

$$(48)\quad 0 = R_2\sin(L_2-\chi) - N_1R_1\sin(L_1-\chi) - N_3R_3\sin(L_3-\chi)$$

şi ecuaţia (47) se scrie, ţinînd cont de (48):

$$(49)\quad \begin{cases} \rho_2\cos\beta_2 \dfrac{\operatorname{tg}\beta_2-\operatorname{tg}\beta_0}{\operatorname{tg}\varphi} = (N_1-n_1)R_1\sin(L_1-\chi) + \\ \quad + (N_3-n_3)R_3\sin(L_3-\chi) \end{cases}$$

Valorile N_1 şi N_3 sînt respectiv

$$(50)\quad \begin{cases} N_1 = \dfrac{[R_2R_3]}{[R_1R_3]} = \dfrac{R_2\sin(L_3-L_2)}{R_1\sin(L_3-L_1)} \\ N_3 = \dfrac{[R_1R_2]}{[R_1R_3]} = \dfrac{R_2\sin(L_2-L_1)}{R_3\sin(L_3-L_1)} \end{cases}$$

Revenind la ecuaţiile (32) şi (47), dacă notăm

$$(51)\quad \alpha \doteq \frac{\operatorname{tg}\varphi \sec\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_0}$$

prin identificare,găsim

$$(52) \qquad b_i = \alpha R_i \sin(L_i - \chi) \quad , i=\overline{1,3}$$

4.7. REZOLVAREA ECUAȚIILOR ÎN ρ_2 ȘI r_2

Ecuațiile care dau ρ_2 și r_2 scrise cu ajutorul coeficienților în primă aproximație sînt:

$$(53) \qquad \begin{cases} \rho_2 = K_0 - \dfrac{l_0}{r_2^3} \\ r_2^2 = \rho_2^2 + 2\rho_2 R_2 \cos\delta + R_2^2 \end{cases}$$

Gauss a dat un procedeu elegant de rezolvare : să considerăm (figura 9) triunghiul rectiliniu avînd drept vîrfuri,la momentul t_2 pozițiile T_2 ale centrului Pămîntului,P_2 a astrului,și centrul S al Soarelui;unghiul din T_2 este suplementul lui δ ;să luăm drept necunoscută principală unghiul în P_2,notat cu z;avem

$$(54) \qquad \frac{r_2}{\sin\delta} = \frac{R_2}{\sin z} = \frac{\rho_2}{\sin(\delta - z)} \;;$$

dacă se substituie expresiile lui ρ_2 și r_2 în prima ecuație (53), ea devine

$$\frac{R_2 \sin(\delta - z)}{\sin z} = K_0 - \frac{l_0 \sin^3 z}{(R_2 \sin\delta)^3},$$

$$R_2 \sin\delta \cos z - (R_2 \cos\delta + K_0)\sin z = $$

$$= \frac{-l_0}{(R_2 \sin\delta)^3} \cdot \sin^4 z$$

de unde,punînd

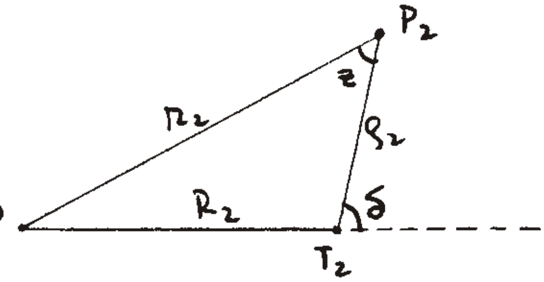

fig. 9

$$(55) \qquad \begin{cases} R_2 \sin\delta \doteq \Gamma \sin\gamma , \\ R_2 \cos\delta + K_0 \doteq \Gamma \cos\gamma , \\ \dfrac{l_0}{\Gamma (R_2 \sin\delta)^3} \doteq M_0 \end{cases}$$

ecuația ia forma simplă

$$(56) \qquad \sin(z - \gamma) = M_0 \sin^4 z$$

unde convenim să luăm pentru Γ semnul lui l_0 ,a.i. $M_0 > 0$.

Pusă sub formă algebrică în raport cu $\sin z$,ecuația (56) va fi de gradul 8,de aceea recomandăm aici un punct de vedere practic pentru rezolvare,prin aproximații succesive.

Fie z_0 o valoare apropiată de z,valoarea exactă fiind $z_0 + \varepsilon$, a.i.,după ecuația (56) avem:

$$(57) \qquad \log M_0 + 4 \log \sin(z_0 + \varepsilon) - \log \sin(z_0 + \varepsilon - \gamma) = 0$$

existența logaritmilor fiind asigurată de convențiile făcute mai sus, ceea ce se poate scrie

(58) $$\log M_0 + 4\log\sin z_0 - \log\sin(z_0-\gamma) + 4[\log\sin(z_0+\varepsilon) - \log\sin z_0] - [\log\sin(z_0-\gamma+\varepsilon) - \log\sin(z_0-\gamma)] = 0$$

Prima linie este reziduul A al substituţiei lui z cu z_0 în ecuaţia (57); să admitem că putem interpola logaritmii prin proporţionalitate, adică putem scrie

$$\log\sin(z_0+\varepsilon) - \log\sin z_0 = \varepsilon d$$

d fiind variaţia logaritmului sinusului, şi, de asemenea,

$$\log\sin(z_0-\gamma+\varepsilon) - \log\sin(z_0-\gamma) = \varepsilon d'$$

Pentru a determina pe ε, din (58) vom avea ecuaţia

(59) $$A + \varepsilon(4d - d') = 0$$

4.8. CALCULUL COEFICIENŢILOR ECUAŢIILOR CARE DAU ρ_1 ŞI ρ_3

Revenind la ecuaţiile (19), vom calcula coeficienţii:

$$|\xi_1 X_3 \xi_3| = R_3\cos\beta_1\cos\beta_3 \begin{vmatrix} \cos\lambda_1 & \cos L_3 & \cos\lambda_3 \\ \sin\lambda_1 & \sin L_3 & \sin\lambda_3 \\ \operatorname{tg}\beta_1 & 0 & \operatorname{tg}\beta_3 \end{vmatrix}$$

şi folosind acelaşi artificiu ca în calculul lui $|\xi_1\xi_2\xi_3|$, găsim

(60) $$|\xi_1 X_3 \xi_3| = R_3\cos\beta_1\cos\beta_3\operatorname{tg}\varphi\sin(\lambda_3-\lambda_1)\sin(L_3-\chi)$$

De asemenea,

$$|\xi_3 X_1 X_3| = R_1R_3\cos\beta_3 \begin{vmatrix} \cos\lambda_3 & \cos L_1 & \cos L_3 \\ \sin\lambda_3 & \sin L_1 & \sin L_3 \\ \operatorname{tg}\beta_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

deci

(61) $$|\xi_3 X_1 X_3| = R_1R_3\sin\beta_3\sin(L_3-L_1)$$

Să ne amintim acum că în 4.6. dusesem prin P_1 şi P_3 cercul mare a cărui înclinare pe ecliptică era φ iar longitudinea nodului era χ. Dacă ducem acum celelalte două cercuri mari ce trec prin P_2 şi P_3 şi respectiv prin P_1 şi P_2, să stabilim următoarele corespondenţe :

(62) $$\mathcal{C}(P_2,P_3) \longrightarrow (\varphi_1,\chi_1)\ ;\ \mathcal{C}(P_1,P_2) \longrightarrow (\varphi_3,\chi_3)$$

$$\mathcal{C}(P_1,P_3) \longrightarrow (\varphi,\chi)$$

Vom avea, prin analogie cu formulele (46),

$$(63)\begin{cases} tg\,\varphi_1 \sin\left(\dfrac{\lambda_2+\lambda_3}{2}-\chi_1\right) = \dfrac{\sin(\beta_2+\beta_3)}{2\cos\beta_2\cos\beta_3\cos\frac{\lambda_3-\lambda_2}{2}} \\ tg\,\varphi_1 \cos\left(\dfrac{\lambda_2+\lambda_3}{2}-\chi_1\right) = \dfrac{\sin(\beta_3-\beta_2)}{2\cos\beta_2\cos\beta_3\sin\frac{\lambda_3-\lambda_2}{2}} \\ tg\,\varphi_3 \sin\left(\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}-\chi_3\right) = \dfrac{\sin(\beta_1+\beta_2)}{2\cos\beta_1\cos\beta_2\cos\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}} \\ tg\,\varphi_3 \cos\left(\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}-\chi_3\right) = \dfrac{\sin(\beta_2-\beta_1)}{2\cos\beta_1\cos\beta_2\sin\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}} \end{cases}$$

Să reunim, în fiecare ecuaţie (19), cei doi ultimi termeni din membrul secund; avem, de exemplu, cu (61):

$$|\xi_3 X_2 X_3| - m_1 |\xi_3 X_1 X_3| = \\ = R_1 R_3 \sin\beta_3 \sin(L_3-L_1)\cdot\left[\frac{R_2\sin(L_3-L_2)}{R_1\sin(L_3-L_1)} - m_1\right]$$

Observînd că primul termen din paranteză este N_1 conform (50), cît şi faptul că, folosind (60) şi (62),

$$|\xi_2 X_3 \xi_3| = R_3\cos\beta_2\cos\beta_3\, tg\,\varphi_1 \sin(\lambda_3-\lambda_2)\sin(L_3-\chi_1)$$

ecuaţiile (19) implică :

$$(64)\begin{cases} n_1\rho_1\cos\beta_1 = \rho_2\cos\beta_2\dfrac{tg\,\varphi_1\sin(\lambda_3-\lambda_2)\sin(L_3-\chi_1)}{tg\,\varphi\sin(\lambda_3-\lambda_1)\sin(L_3-\chi)} + \\ \qquad + (N_1-n_1)\dfrac{R_1\sin(L_3-L_1)\,tg\,\beta_3}{tg\,\varphi\sin(\lambda_3-\lambda_1)\sin(L_3-\chi)}, \\ n_3\rho_3\cos\beta_3 = \rho_2\cos\beta_2\dfrac{tg\,\varphi_3\sin(\lambda_2-\lambda_1)\sin(L_1-\chi_3)}{tg\,\varphi\sin(\lambda_3-\lambda_1)\sin(L_1-\chi)} + \\ \qquad + (N_3-n_3)\dfrac{R_3\sin(L_3-L_1)\,tg\,\beta_1}{tg\,\varphi\sin(\lambda_3-\lambda_1)\sin(L_1-\chi)} \end{cases}$$

Dacă se cunosc ρ_1, ρ_2 şi ρ_3, vom putea calcula distanţele heliocentrice şi latitudinile şi longitudinile heliocentrice ale astrului (b, l); în adevăr, lăsînd sistemul cartezian ecliptic (pînă acum arbitrar) să se rotească a.i. $Ox=ST$, avem:

$$(65)\begin{cases} r\cos b\cos(l-L) = \rho\cos\beta\cos(\lambda-L) + R \\ r\cos b\sin(l-L) = \rho\cos\beta\sin(\lambda-L) \\ r\sin b = \rho\sin\beta \end{cases}$$

4.9. MODIFICĂRILE LUI ENCKE

Din (49), (51) şi (52) rezultă

$$(66)\qquad \rho_2 = (N_1-n_1)\,b_1 + (N_3-n_3)\,b_3$$

În loc să introducă cantităţile P şi Q ale lui Gauss, Encke substituie mai simplu, în loc de n_1 şi n_3, primii termeni din dezvoltarea în serie (27); lăsînd de-o parte termenii de ordin trei în

n_1 şi n_3 ,comitem,de vreme ce b_1 şi b_3 sînt foarte mari de ordin -2,o eroare de ordin 1 în calculul coeficienţilor : din (27) găsim

$$n_1 = \frac{\theta_1}{\theta_2}\left[1+\frac{\theta_3(\theta_2+\theta_1)}{6r_2^3}+\dots\right]$$

(66') $$n_3 = \frac{\theta_3}{\theta_2}\left[1+\frac{\theta_1(\theta_2+\theta_3)}{6r_2^3}+\dots\right]$$

Dacă se substituie n_1 şi n_3 în ecuaţia (66),limitîndu-ne la termenii scrişi,ea devine:

$$\rho_2 = b_1\left(N_1-\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)+b_3\left(N_3-\frac{\theta_3}{\theta_2}\right)-\frac{\theta_1\theta_3}{6r_2^3}\left(b_1\frac{\theta_2+\theta_1}{\theta_2}+b_3\frac{\theta_2+\theta_3}{\theta_2}\right)$$

Punem atunci

(67) $$\begin{cases} \dfrac{\theta_1}{\theta_2} \doteq n_{10}\ ; \quad \dfrac{\theta_3}{\theta_2} \doteq n_{30}\ ; \quad \dfrac{\theta_1\theta_3}{6} \doteq g_0 \\ b_1(N_1-n_{10})+b_3(N_3-n_{30}) \doteq K_0 \\ g_0(1+n_{10}) \doteq \vartheta_{10}\ ; \quad g_0(1+n_{30}) \doteq \vartheta_{30} \\ b_1\vartheta_{10}+b_3\vartheta_{30} \doteq l_0 \end{cases}$$

şi ecuaţia ia forma

(68) $$\rho_2 = K_0 - \frac{l_0}{r_2^3}$$

care este identică cu prima ecuaţie Gauss (36),coeficienţii fiind însă expresii puţin diferite.

Dacă notăm,mai departe,

(69) $$n_{11} \doteq \frac{y_2}{y_1}\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{y_2}{y_1}n_{10}\ ; \quad n_{31} \doteq \frac{y_2}{y_3}\frac{\theta_3}{\theta_2} = \frac{y_2}{y_3}n_{30}\ ,$$

cînd se înlocuiesc n_1 şi n_3 prin n_{11} şi n_{31} în ecuaţia (66),avem

$$\rho_2 = b_1(N_1-n_{10})+b_3(N_3-n_{30}) - \frac{1}{r_2^3}\left[b_1 n_{10}\left(\frac{y_2}{y_1}-1\right)r_2^3+b_3 n_{30}\left(\frac{y_2}{y_3}-1\right)r_2^3\right]$$

Punem încă

(70) $$\begin{cases} \vartheta_{11} \doteq n_{10} r_2^3\left(\dfrac{y_2}{y_1}-1\right)\ ; \quad \vartheta_{31} \doteq n_{30} r_2^3\left(\dfrac{y_2}{y_3}-1\right), \\ b_1\vartheta_{11}+b_3\vartheta_{31} \doteq l_1 \end{cases}$$

şi găsim

(71) $$\rho_2 = K_0 - \frac{l_1}{r_2^3}$$

Continuăm calculul pînă găsim pentru n_1 şi n_3 valori suficient de precise.

4.10. ALGORITM DE CALCUL. EXEMPLU NUMERIC

Datele inițiale sînt cele trei epoci de observare t_i, coordonatele (λ_i, β_i), distanțele heliocentrice ale Pămîntului R_i și longitudinile Pămîntului în orbită, L_i.

I: Calculul distanțelor geocentrice

1. calculăm $\theta_i, i=\overline{1,3}$ cu formulele (24);
2. avem $q_o, n_{1o}, n_{3o}, \nu_{1o}, \nu_{3o}$ prin formulele (67);
3. urmează calculul unghiurilor $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și χ din (46);
4. cu (43) rezultă β_o iar cu (51) rezultă α;
5. calculăm N_1 și N_3 prin formulele (50), apoi $b_i, i=\overline{1,3}$ cu (52);
6. din (67) calculăm K_o și ℓ_o;
7. din (41') rezultă unghiul δ, cuprins între 0 și π;
8. cu (55) calculăm γ și Γ, care Γ are semnul lui ℓ_o, apoi M_o;
9. se rezolvă ecuația lui Gauss (56);
10. se calculează ρ_2 și r_2 cu (54);
11. φ_1 și φ_3; χ_1 și χ_3 rezultă cu (63) și condiția $tg\,\varphi_i > 0, i=1,3$;
12. n_1 și n_3 implică din (66') și (67):

$$n_1 = n_{10} + \frac{\nu_{10}}{r_2^3} \quad ; \quad n_3 = n_{30} + \frac{\nu_{30}}{r_2^3}$$

13. în sfîrșit, rezultă ρ_1 și ρ_3 cu (64).

II: Determinarea planului orbitei și a argumentelor de latitudine

14. cu formulele (65) calculăm pozițiile heliocentrice (b_i, ℓ_i), $r_i, i=\overline{1,3}$;
15. cu (4) 3.2. calculăm i și Ω; dacă $\ell_3 > \ell_1$, $tg\,i > 0$; dacă $\ell_3 < \ell_1$, $tg\,i < 0$;
16. din triunghiul sferic $NP_jQ_j, j=\overline{1,3}$, găsim u_1, u_2, u_3:

$$\begin{cases} \sin u_j \sin i = \sin b_j \\ \cos u_j = \cos(\ell_j - \Omega) \cos b_j \end{cases}$$

III: Rapoartele sectoarelor eliptice la triunghiuri

17. calculăm $f_2 = \frac{u_3 - u_1}{2}$;
18. calculăm $m_2 = \frac{\theta_2^2}{(2\sqrt{r_1 r_3}\cos f_2)^{3/2}}$ cu (13) 3.3.;
19. avem χ cu (15) 3.3. și făcînd $r' \to r_3$, $r \to r_1$;
20. găsim $\ell = \frac{\sin^2 \frac{f_2}{2} + tg^2\, 2\chi}{\cos f_2}$ cu (16) 3.3.;

21. luăm $h_0=\dfrac{m_2^2}{5/6+\ell}$ şi calculăm o primă valoare pentru y_2 din (24°)3.3. apoi calculăm $x=\left(\dfrac{m_2}{y_2}\right)^2-\ell$ cu (22)3.3.,(20)3.3. ue da pe ξ ;vom forma $h_1=\dfrac{m_2^2}{5/6+\ell+\xi}$ cu (24)3.3.care va da cu (24°)3.3.un nou y_2 şamd pînă la o aproximare suficientă a lui y_2.

IV: Elementele orbitei în planul ei

Presupunem orbita eliptică,reîntorcîndu-ne la 3.5.pentru calculul în cazul orbitei hiperbolice.

22. cu (22)3.3.se calculează x_2,apoi cu (17)3.3.prima rezultă g_2;

23. cu $(r,r')\to(r_1,r_3)$şi (30)3.3.rezultă φ, F_2, G_2, a , $e=\sin\varphi$;

24. $v_1=F_2-f_2$;apoi $\omega=u_1-v_1$; $E_1=G_2-g_2$;mişcarea medie, $\mu=\dfrac{k}{a^{3/2}}$;

25. $M_1=E_1-e\sin E_1=\mu(t_1-T)$ de unde rezultă T.

Aplicaţie : Să se găsească elementele orbitei planetei Jupiter, pentru care se dau următoarele 3 observaţii:

$t_1 = 2447900.5$ $\quad\lambda_1 = 94°.163635$ $\quad\beta_1 = -0°.0970017$

$t_2 = 2447960.5$ $\quad\lambda_2 = 91°.096846$ $\quad\beta_2 = 0°.0387175$

$t_3 = 2448020.5$ $\quad\lambda_3 = 98°.340756$ $\quad\beta_3 = 0°.1241319$

Se mai dau

$R_1 = 0.9833666$ $\quad R_2 = 0.9930721$ $\quad R_3 = 1.0117059$

$L_1 = 108°.45986$ $\quad L_2 = 169°.15672$ $\quad L_3 = 227°.912258$

Soluţie: Se găsesc următoarele:

$\theta_1 = 1.032126$ $\quad g_0 = 0.1775473$ $\quad \nu_{10} = 0.2663209$

$\theta_3 = 1.032126$ $\quad n_{10} = 0.5$ $\quad \nu_{30} = 0.2663209$

$\theta_2 = 2.064252$ $\quad n_{30} = 0.5$

Rezolvînd sistemul în χ şi φ ,obţinem

$\chi = 95°.995844$; $\varphi = 3°.0310586$

Urmează

$\beta_0 = -0.2590908$;
$\alpha = 10.187332$;
$N_1 = 0.9915425$;
$N_3 = 0.9830222$;
$b_1 = 2.1621236$;
$b_2 = 9.682968$;
$b_3 = 7.6693381$;
$K_0 = 4.7672362$;
$\ell_0 = 2.6183237$

A treia ecuaţie în δ şi sistemul în γ şi Γ dau

$\delta = 78.059877$; $\gamma = 11.055423$; $\Gamma = 5.0667196$

Rezultă

$M_0 = 0.5634459$

de unde, ecuaţia lui Gauss dă după 6 paşi

$z = 11.099769$

şi de aici

$\rho_2 = 4.7468665$; $r_2 = 5.0467295$

Sistemele în χ_1, φ_1 şi χ_3, φ_3 dau

$\chi_1 = 87.837303$; $\chi_3 = -88.028388$

$\varphi_1 = 0.6809062$; $\varphi_3 = 2.534413$

Mai departe,

$m_1 = 0.5020719$; $m_3 = 0.5020719$

şi rezultă

$\rho_1 = 3.7984058$; $\rho_3 = 5.9171871$

Sistemale în $(l_i, b_i), i=\overline{1,3}$ dau

$l_1 = 97.089334$; $b_1 = -0.077445$

$l_2 = 102.19661$; $b_2 = 0.0364169$

$l_3 = 106.75407$; $b_3 = 0.1378053$

Tot de aici, mai rezultă razele vectoare

$r_1 = 4.7575194$; $r_3 = 5.3300508$

Acum, sistemul în i şi Ω dă primele elemente,

$\Omega = 100.56364$; $i = 1.2777341$

Mai departe,

$u_1 = -3.475168$; $u_2 = 1.6333759$

$u_3 = 6.1919578$

Trecînd la III,

$f_2 = 4.8335629$;

$m_2 = 0.0649313$;

$\chi = 0.813738$;

$l = 2.59465-03$

De aici începe procesul de aproximare, găsind mai întîi

$h_0 = 5.04358-03$;

$y_2 = 1.0056039$;

$r = 1.57456-03$;

$\xi = 1.41799-07$;

$h_1 = 5.04358-03$

deci,dacă $h_1 = h_0$,cu această valoare vom calcula y_2,prin aproximaţii succesive doar în (24°)3.3.;găsim

$y_2 = 1.0055698$

Corespunzător,rezultă

$x_2 = 1.57484-03$; $g_2 = 4.5486862$

Sistemul în a, φ, F_2 şi G_2 dă

$\varphi = 36.466046 \Rightarrow e = 0.5943463$;

$a = 6.6528743$

$F_2 = 104.08827$; $G_2 = 65.906158$

$\omega = 257.27012$;

$\mu = 1.00246-03$;

$E_1 = 61.357471$;

$M_1 = 1.0597818$;

$t_1 - T = 1057.1812 \Rightarrow T = 2\,446\,843.3188$

Iată şi tabelul comparativ cu elementele furnizate de Anuarul Astronomic'90,p.100,105,de unde au fost extraşi primii termeni ai dezvoltărilor în serie de timp :

	Calculate	Publicate
a	6.6528743	5.2026
e	0.5943463	0.048494851
ω	257.27012	273.96695
Ω	100.56364	100.46444
i	1.2777341	1.3032697

4.11. CONSIDERATII COMPARATIVE ASUPRA METODELOR LAPLACE SI GAUSS

Diferenţele mari apărute în calculul elementelor care dau forma orbitei din exemplul de mai sus se explică astfel: metoda lui Gauss,ca şi metoda lui Laplace,sînt deficitare în cazul particular cînd orbita astrului este situată în planul eclipticii sau este puţin înclinată pe aceasta.De exemplu,în cazul metodei lui Gauss,se constată,în adevăr,că cele trei direcţii geocentrice sînt practic conţinute în planul eclipticii,deci coeficientul $|\xi_1 \xi_2 \xi_3|$ al lui ρ_2 se anulează din cauza unghiurilor drepte ale celor trei direcţii cu axa Oz. La fel, la metoda lui Laplace, unde $|\xi\ \xi'\ \xi''| = 0$ din cauza vitezei şi accéleraţiei din planul xy.

Aceasta explică, pe de o parte, diferenţele mari apărute în exemplul cu planeta Jupiter, care are înclinarea orbitei pe ecliptică de numai un grad, iar pe de altă parte, că în calculul prin metoda Laplace al elementelor orbitei cometei Encke, înclinarea de douăsprezece grade pe ecliptică conduce la o precizie mai mare a rezultatelor.

Din această cauză este necesar, în aplicaţiile numerice la metoda lui Gauss expusă în lucrarea de faţă, să se tragă deja concluzia asupra preciziei rezultatelor imediat după ce s-a determinat i (care nu este afectat de erorile datorate lui $|\xi_1\ \xi_2\ \xi_3|$). Şi recomandăm aici compararea lui cu 6°, obţinîndu-se în cazul $i>6^\circ$ o precizie suficientă pentru toate elementele. Rezultă, din acest punct de vedere, că nu se recomandă aplicarea acestor metode la planetele mari, care au înclinaţii mici ale orbitelor pe ecliptică. Dar ele pot fi aplicate cu succes în primul rînd pentru comete şi, secund, pentru asteroizi, ale căror distribuţii ale lui i permit acest lucru ([7] pag.246).

Un alt punct de vedere comparativ ar fi cel referitor la datele de observaţie : pe de o parte, metoda lui Gauss foloseşte coordonatele astrului şi cele trei momente de timp, care sînt mărimi uşor măsurabile, iar pe de alta, metoda lui Laplace foloseşte derivate de prim şi secund ordin, despre care nici autorul ei nu arată cum se pot obţine. Dăm mai jos un pasaj semnificativ dintr-o scrisoare a lui Lagrange adresată lui Laplace la 15 mai 1781 ("OEuvres de Lagrange", vol. XIV, p.108): "Consider că metoda dumneavoastră furnizează, analitic vorbind, soluţia cea mai simplă a problemei în cauză; dar mă tem că ea nu este atît de utilă în practică precum este în teorie, din cauza dificultăţii de a determina, a posteriori, derivatele prime şi secunde ale longitudinilor şi latitudinilor geocentrice".

Un ultim aspect comparativ din lucrarea de față se referă la precizia celor două metode : pentru Gauss,se recomandă ca două observații consecutive să fie alese la circa una sau două luni;de asemenea,din expunerea teoretică s-a reținut că precizia maximă se obține în cazul cînd cele trei observații sînt echidistante.

Pe de altă parte,Poincaré a arătat ("Bulletin astronomique",vol. XXIII,p.161)că,în afara cazului de observații echidistante,primul calcul efectuat cu ecuațiile lui Laplace poate da o aproximație superioară celei din metoda lui Gauss.

Pentru alte aspecte comparative recomandăm [12].